Plotpjestueshmëria e numrave të plotë

Pohim. Vërtetoni që për çdo dy numra të plotë $a \in \mathbb{Z}$ dhe $b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, ekziston vetëm një çift numrash të plotë (q, r), për të cilët vlen: $a = bq + r$, ku $0 \leqslant r < |b|$.

Vërtetim.

1. Bashkësia:

$$E = \{a - bx | x \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}_0$$

nuk është bashkësi boshe, sepse $a - b(\underbrace{(-\mathrm{sgn}\{b\})|a|}_{\in\mathbb{Z}}) = a + |a||b| \geqslant a + |a| \geqslant 0$, pra ky element përmbahet në E.

Bashkësia E përmbahet në bashkësinë $\mathbb{N}_0$, në të cilën vlen principi i minimumit, prandaj:

$$\exists \min E = r \in \mathbb{N}_0$$

Pra, $\exists q \in \mathbb{Z}$ i tillë që $a - bq = r$, nga ku kemi $a = bq + r$.

Për numrin r duhet të jetë $r \geqslant 0$, sepse $r \in \mathbb{N}_0$ dhe gjithashtu duhet të jetë $r < |b|$, sepse në qoftë se $r \geqslant |b|$ atëherë do kishim $r - |b| \geqslant 0$ dhe

$$a = bq + r \Rightarrow a = bq + |b| + r - |b| = b\left(q + \begin{cases} 1, & \text{n.q.s. } b > 0 \\ -1, & \text{n.q.s. } b < 0 \end{cases}\right) + r - |b|$$

pra:

$$r - |b| \in E$$

që bie në kundërshtim me minimalitetin e elementit r në bashkësinë E.

Le të jetë tani (q_1, r_1) një çift i çfarëdoshëm numrash të plotë për të cilët vlen $a = bq_1 + r_1$, ku $0 \leqslant r_1 < |b|$. Nga barazimet:

$$a = bq + r = bq_1 + r_1$$

kemi:

$$b(q - q_1) = r_1 - r \Rightarrow |b||q - q_1| = |r - r_1|$$

Për të qënë $(q_1, r_1) \neq (q, r)$, duhet dhe mjafton të jetë $q \neq q_1$, sepse në qoftë se $q = q_1$ atëherë $r = r_1$, pra: $(q_1, r_1) = (q, r)$. Gjithashtu $q \neq q_1 \Rightarrow r \neq r_1$.

Duke supozuar që $(q_1, r_1) \neq (q, r)$, kemi që:

$$|r - r_1| = |b||q - q_1| \geqslant |b| \tag{1}$$

Nga ana tjetër kemi:

$$0 \leqslant r, r_1 < |b| \Leftrightarrow r, r_1 \in \{0, \cdots, |b| - 1\} \Leftrightarrow |r - r_1| \leqslant |b| - 1 < |b|$$

që bie në kundërshtim me relacionin (1).

Pra, duhet të jetë $(q_1, r_1) = (q, r)$ dhe kështu kemi unicitetin e çiftit të numrave të plotë (q, r), për të cilin vlen $a = bq + r$ dhe $0 \leqslant r < |b|$.

Në barazimin a=bq+r ku $0 \leq r < |b|$, a quhet i pjesëtueshmi, b pjesëtuesi, q herësi dhe r mbetja.

Shembuj

Për çiftin (17;3)ekziston çifti (5;2) i tillë që $17=3\cdot5+2$ ku $2<3$

Për numrat 5 dhe 7 ekziston çifti (0;5) i tillë që $5=7\cdot0+5$ ku $5<7$

Për numrat -12 dhe 5 ekziston çifti (-3;3) i tillë që $-12=5\cdot(-3)+3$ ku $3<5$

Për çiftin -15;-9 ekziston çifti (2;3) i tillë që $-15=(-9)\cdot2+3$ ku $3<|-9|$

Plotpjestueshmëria

Themi që numri a plotpjesëton numrin b atëherë kur mbetja e pjesëtimit të b me a është zero. Në këtë rast përdorim shënimin a:b. Në rast të kundërt , pra kur mbetja është e ndryshme nga zero, përdorim shënimin a÷b.

Është e vërtetë ekuivalenca $a:b \Leftrightarrow (\exists q\in Z)\ (a=b\cdot q)$

Nga kjo ekuivalencë rrjedhin vetitë e mëposhtme:

1) Për çdo numër a, $a:\pm1$
2) Çdo numër a plotpjesëton zeron, pra është i vërtetë pohimi 0:a
3) Nëse b:0 atëherë b=0
4) Janë të vërteta ekuivalencat $a:b \Leftrightarrow -a:b \Leftrightarrow -a:-b \Leftrightarrow a:-b \Leftrightarrow |a|:|b|$
5) Për çdo tre numra të plotë është i vërtetë implikimi: $(a:b \wedge b:c) \Rightarrow a:c$
6) $(a:b \wedge c:d) \Rightarrow ac:bd$
7) a:m dhe b:m $\Rightarrow ax\pm by:m$
8) a:b dhe $a\neq0$ $|a|>|b|$
9) $a:b \wedge b:a \Rightarrow |a|=|b|$

Po provojmë disa prej tyre.

4) $a:b \Leftrightarrow -a:b \Leftrightarrow -a:-b \Leftrightarrow a:-b \Leftrightarrow |a|:|b|$

4.1. a:b $\Leftrightarrow$ -a:b

a:b $\Leftrightarrow(\exists q\in Z)$ (a=b·q) $\Leftrightarrow$-a=-bq$\Leftrightarrow$ -a=b(-q) $\Leftrightarrow$ -a:b

4.2. a:b $\Leftrightarrow |a| : |b|$

a:b $\Leftrightarrow(\exists q\in Z)$ (a=b·q) $\Leftrightarrow$ $|a| = |b|\cdot|q| \Leftrightarrow$ $|a| : |b|$

Gjatë pjesëtimit me 2 bashkësia e numrave të plotë copëtohet në dy klasa :
në bashkësinë e numrave të plotë çift elementët e së cilës gjatë pjesëtimit me 2 kanë mbetjen zero, pra kanë trajtat 2k dhe në bashkësinë e numrave të plotë tek që gjatë pjesëtimit me 2 kanë mbetjen 1, pra elementët e së cilës kanë trajtat 2k+1.

Mund të provohen lehtë pohimet:

-Shuma e dy numrave të plotë tek është çift

-Shuma e një numri të plotë tek me një numër të plotë çift është numër tek

-Katrori i një numri të plotë tek është numër i plotë tek tek

- Katrori i një numri të plotë çift është numër i plotë çift

-Prodhimi i dy numrave të plotë të njëpasnjëshëm plotpjesëtohet me 2

- Ndryshesa e katrorëve të dy numrave të plotë tek plotpjesëtohet me 8.

Provojmë këtë pohim të fundit.

$a=2n+1 \Rightarrow a^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$. Meqë n(n+1):2 atëherë 4n(n+1):8, pra 4n(n+1)=8k . Atëherë $a^2=8k+1$

Në mënyrë të ngjashme nga b=2m+1 do të kemi $b^2=8l+1$.

$a^2-b^2=(8k+1)-(8l+1)=8(k-l)$ pra $a^2-b^2:8$

Gjatë pjesëtimit me 3 bashkësia e numrave të plotë copëtohet në 3 klasa :
në bashkësinë e numrave plotë elementët e së cilës gjatë pjesëtimit me 3 kanë mbetjen zero, pra janë të trajtës 3k; në bashkësinë e numrave të plotë që gjatë pjesëtimit me 3 kanë mbetjen 1, pra elementët e saj janë të trajtës 3k+1 dhe në bashkësinë e numrave të plotë që gjatë pjesëtimit me 3 kanë mbetjen 2, pra elementët e saj janë të trajtës 3k+2.

Provojmë pohimet:

-Prodhimi i tre numrave të plotë të njëpasnjëshëm plotpjesëtohet me 3.

Vërtetë nëse a,a+1 dhe a+2 janë tre numra të njëpasnjëshëm, atëherë $a\cdot(a+1)\cdot(a+2)$: 3 pasi: Nëse a=3k atëherë plotpjesëtohet me 3 faktori i parë i këtij prodhimi, prandaj plotpjesëtohet edhe vetë prodhimi.

Nëse a=3k+1 atëherë plotpjesëtohet me 3 faktori i tretë këtij prodhimi, prandaj plotpjesëtohet edhe vetë prodhimi.

Nëse a=3k+2 atëherë plotpjesëtohet me 3 faktori i dytë i këtij prodhimi, prandaj plotpjesëtohet edhe vetë prodhimi.

- Tregoni se nuk numrat e plotë të trajtës 3n+2 nuk mund të jenë katrorë të plotë

Supozojmë të kundërtën që ekziston një numër i plotë x i tillë që $x^2=3n+2$. kjo do të thotë katrori i këtij numri të plotë gjatë pjesëtimit me 3 e ka mbetjen 2. kjo është absurde pasi nuk mund të ketë numra të plotë katrori i të cilëve gjatë pjesëtimit me 3 e kanë mbetjen 2.

Vërtetë nëse numri i plotë ka trajtën 3k atëherë katrori i tij ka mbetjen 0

Nëse numri i plotë ka trajtën 3k+1, katrori i tij do të ketë trajtën:

$(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$ pra katrori i këtij numri gjatë pjesëtimit me 3 ka mbetjen 1.

Nëse numri i plotë ka trajtën 3k+2 katrori i tij do të ketë trajtën:

$(3k+2)^2=9k^2+6k+4=3(3k^2+2k+1)+1$ pra katrori i këtij numri gjatë pjesëtimit me 3 ka përsëri mbetjen 1.

Në përgjithësi gjatë pjesëtimit me n bashkësia e numrave të plotë copëtohet në n klasa: në bashkësinë e numrave plotë elementët e së cilës gjatë pjesëtimit me n kanë mbetjen zero, pra janë të trajtës nk; në bashkësinë e numrave të plotë që gjatë pjesëtimit me n kanë mbetjen 1, pra elementët e saj janë të trajtës nk+1 dhe në bashkësinë e numrave të plotë që gjatë pjesëtimit me n kanë mbetjen 2, pra elementët e saj janë të trajtës nk+2, e kështu me radhë në bashkësinë e numrave të plotë që gjatë pjesëtimit me n kanë mbetjen n-1, pra elementët e saj janë të trajtës nk+(n-1).

Ushtrimi nr. 1

Nqs nr. x dhe y gjatë pjesëtimit me 3, japin mbetjen 1, atëherë prodhimi i tyre, gjatë pjesëtimit me 3, jep mbetjen 1.

Vërtetim

Nga të dhenat kemi:

$$x = 3k+1, \quad k \in \mathbb{N}_0$$
$$y = 3l+1, \quad l \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$$

$$x \cdot y = (3k+1)\cdot(3l+1) = 3k \cdot 3l + 3k + 3l + 1 = 3(\underbrace{3kl + k + l}_{\in \mathbb{N}_0}) + 1$$

Ushtrimi nr. 2

Nqs x gjatë pjesëtimit me 3 jep mbetjen 1 ndërsa y gjatë pjesëtimit me 3 jep mbetjen 2, atëherë prodhimi i tyre gjatë pjesëtimit me 3, jep mbetjen 2

Vërtetim

Nga të dhenat:

$$x = 3k+1, \quad k \in \mathbb{N}_0$$
$$y = 3l+2, \quad l \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$$

$$x \cdot y = (3k+1)(3l+2) = 3k \cdot 3l + 3k \cdot 2 + 3l + 2 = 3(\underbrace{3kl + 2k + l}_{\in \mathbb{N}_0}) + 2$$

Ushtrimi nr. 3

Vërtetoni se prodhimi i dy nr. të njëpasnjëshëm natyrorë jep mbetjen 0 ose 2 gjatë pjesëtimit me 3.

Vërtetim

Për $n \in \mathbb{N}$, dallojmë rastet e mëposhtme:

1) $n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad n \cdot (n+1) = 3k \cdot (3k+1) = 3 \cdot (3k^2 + k) + \underline{\underline{0}}$

2) $n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad n \cdot (n+1) = (3k+1)(3k+1+1) = (3k+1) \cdot (3k+2)$

$$= 3k(3k+2) + (3k+2) = 3(3k^2 + 2k + k) + \underline{\underline{2}}$$

3) $n = 3k+2,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad n(n+1) = (3k+2)(3k+3) = 3 \cdot (3k+2)(k+1)$

$$= 3(3k^2 + 3k + 2k + 2) = 3 \cdot (3k^2 + 5k + 2) + \underline{\underline{0}}$$

Ushtrimi nr. 4

Nqs nr. natyrorë a dhe b japin mbetje të njëjtë gjatë pjesëtimit me k, atëherë $\forall n \in \mathbb{N}$, edhe nr. a^n dhe b^n japin të njëjtën mbetje gjatë pjesëtimit me k.

Vërtetim

Nga të dhënat:

$$\left.\begin{aligned} a &= p \cdot k + i \\ b &= q \cdot k + i \end{aligned}\right., \quad i \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\} \Rightarrow$$

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})}_{= m \in \mathbb{N}} = [(pk+i) - (qk+i)] \cdot m$$

$$= (pk - qk) \cdot m = k \cdot (p-q) \cdot m \quad \text{pra } (a^n - b^n) \vdots k \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} a^n &= p_1 \cdot k + j \\ b^n &= q_1 \cdot k + j \end{aligned}\right., \quad j \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$$

Ushtrimi nr. 5

Vërtetoni që për çdo $n \in \mathbb{N}$, numri $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ është nr natyror

Vërtetim

Për $n \in N$, dallojmë rastet e mëposhtme:

1) $n = 6k,\ k \in N \Rightarrow \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} = \dfrac{\cancel{6}k(6k+1)(6k+2)}{\cancel{6}} = k(6k+1)(6k+2) \in N$

2) $n = 6k+1,\ k \in N \Rightarrow \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} = \dfrac{(6k+1)(6k+2)(6k+3)}{6} = \dfrac{\cancel{2 \cdot 3}(6k+1)(3k+1)(2k+1)}{\cancel{6}}$

$$= (6k+1) \cdot (3k+1)(2k+1) \in N$$

3) $n = 6k+2,\ k \in N \Rightarrow \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} = \dfrac{(6k+2)(6k+3)(6k+4)}{6} = \dfrac{2(3k+1) \cdot 3(2k+1) \cdot (6k+4)}{6}$

$$= (3k+1) \cdot (2k+1)(6k+4) \in N$$

4) $n = 6k+3,\ k \in N \Rightarrow \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} = \dfrac{(6k+3)(6k+4)(6k+5)}{6} = \dfrac{3(2k+1) \cdot 2(3k+2)(6k+5)}{6}$

$$= (2k+1)(3k+2)(6k+5) \in N$$

5) $n = 6k+4,\ k \in N \Rightarrow \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} = \dfrac{(6k+4)(6k+5)(6k+6)}{6} = \dfrac{2(3k+2) \cdot (6k+5) \cdot 3(2k+2)}{6}$

$$= (3k+2) \cdot (6k+5) \cdot (2k+2)$$

6) $n = 6k+5,\ k \in N \Rightarrow \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} = \dfrac{(6k+5)(6k+6)(6k+7)}{6} = \dfrac{\cancel{6}(6k+5)(k+1)(6k+7)}{\cancel{6}}$

$$= (6k+5)(k+1)(6k+7) \in N$$

Ushtrimi nr. 6

Vërtetoni që prodhimi i 5 nr. natyror të njëpasnjëshëm plotpjesëtohet me 120

Vërtetim

Ndër 5 nr. natyrorë të njëpasnjëshëm, gjenden dy nr. çift të njëpasnjëshëm dhe për pasojë prodhimi i tyre $\boxed{\text{plotpjesëtohet}}$ me $\boxed{2 \cdot 4 = 8}$ (njëri: $4k+2 = 2(2k+1)$, tjetri: $4k+4 = 4(k+1)$)

Ndër 5 nr. te njëpasnjeshëm, gjejmë treshe nr. te njëpasnjeshëm

$\Rightarrow$ njëra prej tyre $\boxed{\text{plotpjesëtohet me } 3}$ (ato janë te formës: $3k, 3k+1, 3k+2$)

Ndër 5 nr. te njëpasnjeshëm, gjendet njëri prej tyre që $\boxed{\text{plotpjesëtohet me } 5}$ (ato janë te formës: $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$)

Nga sa thamë më sipër del që prodhimi i 5 nr. te njëpasnjëshem plotpjesëtohet me $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$.

Ushtrimi nr. 7

Nqs nr. natyror n, nuk plotëpjesëtohet as me 2, as me 3, atëherë nr. n^2-1, plotpjesëtohet me 24.

Meqë $n \not\vdots 2$ dhe $\cancel{n \vdots 3}$ $\Rightarrow$ $n \not\vdots 6$ $\Rightarrow$ dallojmë rastet:

1) $n = 6k+1 \Rightarrow n^2-1 = (6k+1)^2 - 1 = 36k^2+12k+1-1 = 36k^2+12k$

$= 12k \cdot (3k+1)$

→ k çift $\Rightarrow 12k(3k+1) = 12 \cdot 2l \cdot (3 \cdot 2l+1) = 24 \cdot l \cdot (6l+1) \vdots 24$
($k = 2l, l \in N_0$)

→ k tek $\Rightarrow 12k(3k+1) = 12 \cdot (2l+1)(6l+3+1) =$
($k = 2l+1, l \in N_0$)
$12(2l+1) \cdot (6l+4) =$
$24 \cdot (2l+1)(3l+2) \vdots 24$

2) $n = 6k+5 \Rightarrow n^2-1 = (6k+5)^2 - 1 = 36k^2 + 60k + 25 - 1 = 36k^2+60k+24$

$= 12k \cdot (3k+5) + 24$

→ k çift $\quad 12 \cdot k \cdot (3k+5) + 24 = 12 \cdot 2 \cdot l \cdot (6l+5) + 24$
($k = 2l, l \in N_0$)
$= 24 \cdot (6l^2+5l+1) \vdots 24$

→ k tek $\quad 12k \cdot (3k+5) + 24 = 12 \cdot (2l+1)(6l+3+5) + 24$
($k = 2l+1, l \in N_0$)
$= 24 \cdot (2l+1)(3l+4) + 24 \quad \vdots 24$

Vërejtje

Nuk shqyrtohen rastet e mëposhtme:

$n = 6k \vdots 6$

$n = 6k+2 = 2(3k+1) \vdots 2$

$n = 6k+3 = 3(2k+1) \vdots 3$

$n = 6k+4 = 2(3k+2) \vdots 2$

Ushtrumi nr. 8

Vërtetoni që për çdo $n \in \mathbb{N}$, numri $n^3 - n$, plotëpjesëtohet me 6

Marrim $n \in \mathbb{N}$. Dallojmë rastet e mëposhtme:

1] $n = 6k \Rightarrow n^3 - n = (6k)^3 - 6k = 6 \cdot (36k^2 - k) \vdots 6$

2] $n = 6k+1 \Rightarrow n^3 - n = (6k+1)^3 - (6k+1) = (6k+1) \cdot [(6k+1)^2 - 1]$

$= (6k+1) \cdot (6k+1+1)(6k+1-1) = 6 \cdot (6k+1)(6k+2) \cdot k \vdots 6$

3] $n = 6k+2 \Rightarrow n^3 - n = (6k+2)^3 - (6k+2) = (6k+2) \cdot (6k+2+1)(6k+2-1)$

$= (6k+2) \cdot (6k+3) \cdot (6k+1) = 2 \cdot 3 \cdot (3k+1)(2k+1)(6k+1)$

$= 6 \cdot (3k+1)(2k+1)(6k+1) \vdots 6$

4] $n = 6k+3 \Rightarrow n^3 - n = (6k+3)^3 - (6k+3) = (6k+3)[(6k+3)^2 - 1]$

$= (6k+3) \cdot (6k+3-1)(6k+3+1)$

$= (6k+3) \cdot (6k+2)(6k+4)$

$= 3 \cdot 2 \cdot (2k+1)(3k+1)(6k+4) \vdots 6$

5] $n = 6k+4 \Rightarrow n^3 - n = (6k+4)^3 - (6k+4) = (6k+4)(6k+4+1)(6k+4-1)$

$= (6k+4)(6k+5)(6k+3) = 2 \cdot 3 (3k+2)(6k+5)(2k+1) \vdots 6$

6] $n = 6k+5 \Rightarrow n^3 - n = (6k+5)^3 - (6k+5) = (6k+5)(6k+5+1)(6k+5-1)$

$= (6k+5)(6k+6)(6k+4) = 6 \cdot (6k+5)(k+1)(6k+4) \vdots 6$

Ushtrimi nr. 9

Provoni që nqs n është nr tek, atëherë $(n^3 - n) \vdots 24$

Vërtetimi

Dallojmë rastet:

1] $n = 6k+1 \Rightarrow$ $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1) = (6k+1)(6k+1-1)(6k+1+1)$

$= 6(6k+1)\cdot k \cdot (6k+2) = 6 \cdot 2 \cdot (6k+1) k \cdot (3k+1)$

$= 12 \cdot \underbrace{(6k+1) \cdot k \cdot (3k+1)}_{\text{çift}} \vdots 24$

- k çift $\Rightarrow k = 2l$, $l \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow (12l+1) \cdot 2l \cdot (6l+1) \vdots 2$
- k tek $\Rightarrow k = 2l+1$, $l \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$ $(12l+7)(2l+1)(6l+4) \vdots 2$

2] $n = 6k+3 \Rightarrow$ $n^3 - n = n(n-1)(n+1) = (6k+3) \cdot (6k+3-1)(6k+3+1)$

$= (6k+3) \cdot (6k+2)(6k+4) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2k+1)(3k+1)(3k+2)$

$= 12 \cdot \underbrace{(2k+1)(3k+1)(3k+2)}_{\text{çift}} \vdots 24$

- k çift $\Rightarrow k = 2l$, $l \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$

  $(4l+1) \cdot (6l+1)(6l+2) \vdots 2$

- k tek $\Rightarrow k = 2l+1$, $l \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$

  $(4l+3) \cdot (6l+4)(6l+5) \vdots 2$